Capítulo 2

Aplicaciones lineales y endormorfismos

1. ¿Por qué?

El concepto de endomorfismo va a ser de una importancia fundamental en la representación de las magnitudes físicas en Mecánica Cuántica. La razón es simple: las magnitudes físicas se representarán como transformaciones lineales en el espacio de los estados físicos y los posibles valores obtenidos en un experimento serán los posibles valores que tomarán estas aplicaciones en una base particular.

Otra importante aplicación de los endomorfismos será la representación de las transformaciones asociadas a los cambios de base de un sistema físico. Estas transformaciones, tan comunes como rotaciones, traslaciones, cambios de escalar, etc serán también representadas por este concepto algebraico.

2. Definición de endomorfismo

2.1. Definición de aplicación lineal. Consideremos un espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Podemos pensar que está formado por los estados de un cierto sistema físico, aunque los conceptos que vamos a presentar son puramente matemáticos y tienen interés *per se*.

Definición 2.1. *Sean V_1, V_2 dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que una aplicación $T : V_1 \to V_2$ entre los conjuntos es una* **aplicación lineal** *si se verifica que*

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) \qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K} \quad v_1, v_2 \in V_1 \tag{37}$$

Desde un punto de vista menos formal, podemos usar como regla: "la imagen de una combinación lineal en V_1 es la combinación lineal de las imágenes en V_2".

Desde un punto de vista práctico estamos pues considerando aquellas transformaciones que respetan la estructura que está identificando a nuestro conjunto, que es la estructura de espacio vectorial.

Un tipo especial de aplicación lineal va a ser aquella que tiene al mismo espacio como conjunto inicial y final de la aplicación, es decir aquel en el que $V_1 = V = V_2$:

Definición 2.2. *Sea V un espacio vectorial. Llamaremos* **endomorfismos** *a las aplicaciones lineales $T : V \to V$, es decir, aquellas que satisfacen*

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) \qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K} \quad v_1, v_2 \in V$$

Ejemplo 2.1. *Consideremos el caso de un espacio vectorial complejo de dimensión uno, $V = \mathbb{C}$. Consideremos la transformación que multiplica cada número por un número complejo fijo $k \in \mathbb{C}$, es decir:*

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto kz \in \mathbb{C} \tag{38}$$

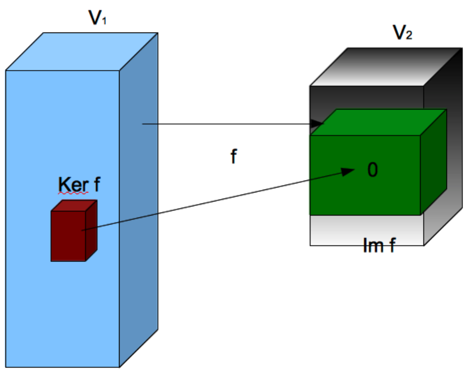
Es evidente que la imagen de una combinación lineal de números complejos se transforma en la correspondiente combinación lineal de imágenes:

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \mapsto k(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \alpha_1 k z_1 + \alpha_2 k z_2,$$

lo que demuestra que la transformación es lineal.

2.2. Núcleo de una aplicación y conjunto imagen. Dentro de una aplicación lineal vamos a individualizar dos subconjuntos de enorme importancia:

- el conjunto de vectores de V_2 que se pueden obtener como imagen de algún vector de V_1.
- el conjunto de vectores de V_1 cuya imagen es el vector $\vec{0}$ de V_2.



Definición 2.3. *Sea $f : V_1 \to V_2$ una aplicación lineal. Denominaremos* **conjunto imagen** *de la aplicación al conjunto de elementos de V_2 para los que existe un elemento de V_1 que tiene una imagen, es decir*

$$\mathrm{Im}(f) = \{v_2 \in V_2 \mid \exists v_1 \in V_1 \text{ tal que } f(v_1) = v_2\} \tag{39}$$

Definición 2.4. *Sea $f : V_1 \to V_2$ una aplicación lineal. Denominaremos* **núcleo** *de la aplicación al conjunto de elementos de V_1 tal que su imagen es el vector $\vec{0} \in V_2$, es decir:*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{v_1 \in V_1 \mid f(v_1) = \vec{0} \in V_2\} \tag{40}$$

La notación Ker*, que es la más habitual, tiene su origen en el término inglés kernel.*

Ejercicio 2.1. *Consideremos $V = \mathbb{C}^n$ y la aplicación:*

$$f(z) = \lambda z \qquad \forall z \in \mathbb{C}^n \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Demostrar que es una aplicación lineal, y determinar, en función de λ, el conjunto imagen y el núcleo de la aplicación.

Ejercicio 2.2. *Consideremos $V = \mathbb{C}^n$ y la aplicación:*

$$f(z) = z_0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}^n \quad z_0 \in \mathbb{C}^n.$$

Es decir, la aplicación es tal que cualquier elemento tiene como imagen un elemento dado, siempre el mismo. Determinar para qué valores de z_0 es una aplicación lineal. En ese caso, determinar su núcleo y el conjunto imagen.

Estos dos conjuntos determinan la mayor parte de las propiedades de la aplicación f. La linealidad que hemos asumido en ésta, determina por ejemplo:

Lema 2.1. *El elemento $\vec{0} \in \mathrm{Ker}(f) \subset V_1$ para cualquier aplicación $f : V_1 \to V_2$*

Demostración. Se deja como ejercicio. □

Lema 2.2. $\mathrm{Ker}(f)$ *es un subespacio vectorial de V_1, así como* $\mathrm{Im}(f)$ *lo es de V_2.*

Demostración. Se deja como ejercicio. □

Es importante darse cuenta de que la dimensión como subespacio de $\mathrm{Im}(f)$ no tiene por qué ser igual a la del espacio V_2.

Lema 2.3. *La aplicación f es inyectiva si y sólo si $\mathrm{Ker}(f) = \vec{0}$. La aplicación es suprayectiva si $\mathrm{Im}\,(f) = V_2$.*

Demostración. Se deja como ejercicio. □

2.3. Composición de endomorfismos. Una propiedad interesante de las aplicaciones lineales es el hecho de que puede definirse una ley de composición para ellas. Así, podemos pensar que aplicamos una transformación $T_2 : V_2 \to V_3$ a los puntos obtenidos como imagen de una transformación $T_1 : V_1 \to V_2$. La linealidad de las aplicaciones permite descomponer de manera sencilla la aplicación consecutiva de las mismas:

$$T_2(T_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)) = T_2(\alpha_1 T_1(v_1) + \alpha_2 T_1(v_2)) = \alpha_1 T_2(T_1(v_1)) + \alpha_2 T_2(T_1(v_2)) \tag{41}$$

Con esto hemos probado el siguiente resultado:

Lema 2.4. *La aplicación consecutiva de aplicaciones lineales es una operación interna dentro del conjunto de aplicaciones lineales, es decir, la aplicación composición es también lineal.*

La ley de composición tiene sentido para cualquier aplicación lineal, y por tanto lo tiene en particular para el caso en que consideramos endomorfismos de un espacio vectorial en sí mismo. Consideremos este caso en lo que sigue. De lo anterior, hemos aprendido que en el conjunto de aplicaciones lineales $\mathrm{End}(V)$ podemos definir una ley de composición:

$$\circ : \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V) \qquad (T_2 \circ T_1)(v) = T_2(T_1(v)) \quad \forall v \in V \tag{42}$$

Esta ley de composición tiene claramente un elemento neutro, que es la aplicación identidad, es decir, aquella que asocia a cada elemento de V, el mismo elemento:

$$\mathrm{id}(v) = V \qquad \forall v \in V. \tag{43}$$

Es trivial probar que

$$f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f \qquad \forall f \in \mathrm{End}(V)$$

Ejercicio 2.3. *Probar que para que exista el inverso de una aplicación $f : V \to V$ respecto a esta operación es condición necesaria que*

$$\mathrm{Ker} f = \vec{0}$$

3. Matrices asociadas a endormorfismos

3.1. Fijar la base determina la matriz. En esta sección vamos a relacionar el concepto de aplicación lineal con otro concepto bien conocido en el ámbito del álgebra lineal como es el de matriz. Vamos a ver que, debido a la linealidad, podremos caracterizar completamente una aplicación lineal (en particular un endomorfismo) por los valores que la transformación tome sobre los elementos de una base del espacio V.

Proposición 2.1. *Sea $T : V_1 \to V_2$ una aplicación lineal. Si consideramos una base del espacio vectorial V_1 en la forma $\{|e^1_j\rangle\}$, la imagen por la aplicación T de cualquier elemento de V_1 está completamente determinada por los valores que toma T sobre los elementos de la base de V_1.*

Demostración. Sabemos que un elemento cualquiera $v \in V_1$ tiene una descomposición única como combinación lineal de los elementos de la base $\{|e^1_j\rangle\}$:

$$v = \sum_j v^j |e^1_j\rangle, \tag{44}$$

donde las componentes $\{v^j\}$ son elementos del cuerpo $\mathbb{K}$. Consideremos ahora que conocemos los valores de la aplicación T actuando sobre los elementos de dicha base, es decir, conocemos los valores de

$$T|e^1_j\rangle \qquad \forall j$$

En ese caso, el valor que la aplicación lineal T tome sobre el vector genérico v será:

$$T(v) = T\left(\sum_j v^j |e^1_j\rangle\right) = \sum_j v^j T|e^1_j\rangle$$

Así pues, conociendo el valor que toma T sobre los elementos de la base podemos obtener el valor que toma sobre un vector genérico: basta con calcular la combinación lineal de esos valores usando los coeficientes $\{v^j\}$ de la descomposición de v respecto a la base. $\square$

Si además de la base considerada sobre V_1 consideramos una base en el espacio vectorial V_2 $\{|e^2_k\rangle\}$, podemos asociar a la aplicación lineal una matriz que representará de manera unívoca toda la transformación. Consideremos así la imagen de un elemento arbitrario de la base de V_1, $T|e^1_j\rangle$. Al ser un elemento de V_2 debe de poder escribirse como combinación lineal de los elementos de su base, dado que todos los elementos de V_2 tienen una determinada expresión en ella. Por consiguiente, podemos escribir el elemento $T|e^1_j\rangle$ como:

$$T|e^1_j\rangle = \sum_k T^k_j |e^2_k\rangle$$

El conjunto de números $\{T^k_j\}$, donde $j = 1, \ldots, n_1 = \dim V_1$ y $k = 1, \ldots, n_2 = \dim V_2$ determinan por consiguiente la aplicación lineal T de forma completa. Podemos decir que entonces la matriz

$$\begin{pmatrix} T_1^1 & T_1^2 & \dots & T_1^{n_2} \\ T_2^1 & T_2^2 & \dots & T_2^{n_2} \\ \vdots & & & \\ T_{n_1}^1 & T_{n_1}^2 & \dots & T_{n_1}^{n_2} \end{pmatrix}$$

representa de forma unívoca a la aplicación una vez que las dos bases han sido fijadas.

En el caso en que la aplicación lineal es un endomorfismo, debemos considerar unicamente una base, y definiremos así:

Definición 2.5. *Sea $T : V \to V$ un endomorfismo definido sobre un espacio vectorial V. Si consideramos una base $\{|e_j\rangle\}_{j=1,\dots,n=\dim V}$ sobre el espacio vectorial, la aplicación lineal determina unívocamente una matriz:*

$$T = \begin{pmatrix} T_1^1 & T_1^2 & \dots & T_1^n \\ T_2^1 & T_2^2 & \dots & T_2^n \\ \vdots & & & \\ T_n^1 & T_n^2 & \dots & T_n^n \end{pmatrix}, \tag{45}$$

que representa la expresión coordenada de las imágenes de los elementos de la base respecto a ella, es decir:

$$T|e_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} T_j^k |e_k\rangle. \tag{46}$$

Será denominada **matriz asociada al endomorfismo T en la base** $\{|e_k\rangle\}$.

Una vez conocemos la expresión de la matriz en esa base, la expresión de la aplicación actuando sobre un vector arbitrario del espacio V se traduce en la acción de la matriz sobre las componentes del vector respecto a la misma base, es decir, si

$$w = T|v\rangle,$$

las componentes de w respecto a la base $\{|e_j\rangle\}$ se obtienen a partir de las de v en la forma:

$$w \Leftrightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^1 & T_1^2 & \dots & T_1^n \\ T_2^1 & T_2^2 & \dots & T_2^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ T_n^1 & T_n^2 & \dots & T_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \tag{47}$$

Es muy importante entender que la relación entre el endomorfismo y la matriz tiene sentido únicamente cuando se ha fijado una base. Si la base fuese diferente, la matriz también lo sería, porque estamos hablando simplemente de la representación de la Ec. (46).

Una excepción a esta regla va a estar dada por la aplicación identidad. Ya vimos en la sección anterior que esta es la aplicación lineal que representa el elemento neutro para la operación de composición de endomorfismos comentada. Es inmediato verificar que:

Lema 2.5. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $\{|e_k\rangle\}$ una base arbitraria definida sobre él. La representación matricial de la aplicación identidad definida como*

$$\mathrm{Id}\,(v) = v \qquad \forall v \in V, \tag{48}$$

corresponde a la matriz identidad:

$$\mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{49}$$

<u>Demostración</u>. Para cada elemento de la base, se va a verificar:

$$\mathrm{Id}\left(|e_k\rangle\right) = |e_k\rangle \qquad k = 1, \dots, n.$$

En consecuencia, la imagen de cada elemento de la base tiene una sola coordenada en la descomposición del elemento imagen en la base dada. □

Ejercicio 2.4. *Consideremos una aplicación lineal*

$$A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2,$$

que cumple que, para cada elemento $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$*, se verifica*

$$A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z_1 - 4z_2 \\ iz_1 - z_3 \end{pmatrix}.$$

Determinar la matriz que representa la aplicación en la base canónica de cada espacio.

Ejercicio 2.5. *Consideremos tres endomorfismos*

$$\sigma_x : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad \sigma_y : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \sigma_z : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$$

definidos por

$$\sigma_x \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \sigma_y \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iz_2 \\ iz_1 \end{pmatrix} \quad \sigma_z \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ -z_2 \end{pmatrix}.$$

Determinar las correspondientes matrices en la base canónica de $\mathbb{C}^2$*.*

3.2. Rango y núcleo de una matriz. De forma similar a como estudiamos el conjunto imagen y el núcleo de una aplicación lineal, podemos ahora estudiar cómo se van a traducir estos conceptos en el lenguaje de matrices, una vez que hayamos tomado una base sobre el espacio vectorial donde está definido el endomorfismo.

Es sencillo darse cuenta de que el conjunto elementos del núcleo de la aplicación lineal corresponden, en el lenguaje de las matrices, al conjunto de puntos $v \in V$ que satisfacen:

$$\begin{pmatrix} T_1^1 & T_1^2 & \dots & T_1^n \\ T_2^1 & T_2^2 & \dots & T_2^n \\ \vdots & & & \\ T_n^1 & T_n^2 & \dots & T_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, la determinación de las coordenadas de los vectores que forman el núcleo es equivalente a la resolución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ v \in V \mid \quad v = \sum_k v^k |e_k\rangle | \quad \begin{cases} T_1^1 v_1 + T_1^2 v_2 + \ldots + T_1^n v_n = 0 \\ T_2^1 v_1 + T_2^2 v_2 + \ldots + T_2^n v_n = 0 \\ \vdots \\ T_n^1 v_1 + T_n^2 v_2 + \ldots + T_n^n v_n = 0 \end{cases} \right\} \tag{50}$$

De una manera similar podemos pensar en la caracterización del conjunto imagen. Hemos visto ya que la dimensión del conjunto imagen no tiene por qué ser la misma que la del espacio ambiente. Es decir, si consideramos un endomorfismo $f : V \to V$, la dimensión de $\mathrm{Im}(f)$ no tiene por qué ser igual a la dimensión de V, sino que puede ser más pequeña. Debido a la linealidad de la aplicación, podemos escribir que la imagen de un vector $|v\rangle = \sum_j v_j |e_j\rangle \in V$ se obtiene como una combinación de los elementos:

$$f|v\rangle = \sum_j v_j f|e_j\rangle \in \mathrm{Im}\,(f).$$

Por tanto:

Lema 2.6. *Los vectores* $\{f|e_j\rangle\}$ *forman un sistema generador de* $\mathrm{Im}\,(f)$.

Pero estos vectores son, precisamente, los que expresados en la base original aparecen en las columnas de la matriz. Para verificarlo, basta verificar que si tomamos las coordenadas de los elementos de la base (es decir, una entrada igual a uno, y todas las demás iguales a cero), la expresión que obtenemos es precisamente la que corresponde a las entradas de la columna correspondiente en la matriz.

Desde otro punto de vista, podemos pensar que aquellos endomorfismos para los que tengamos un núcleo no nulo (esto es, corresponda a un subespacio vectorial de dimensión mayor o igual que uno, al contener el vector $\vec{0} \in V$ y algún otro elemento), tendrán asociado un conjunto imagen de dimensión menor que la dimensión de V. Y recordemos que todo ello puede leerse a partir de las soluciones del sistema de ecuaciones (50). Efectivamente, si esto ocurre, dada la matriz que representa al endomorfismo en la base escogida, existe al menos una combinación lineal entre los n vectores que forman las filas de la matriz que den como resultado el vector nulo. Pero esto quiere decir que esos vectores no serían linealmente independientes, puesto que una combinación con coeficientes no nulos sería igual al vector cero. Con esto concluimos inmediatamente que:

Lema 2.7. *La dimensión de* $\mathrm{Im}\,(f)$ *coincide con el número de vectores fila de la matriz asociada que sean linealmente independientes.*

En consecuencia, debe existir el mismo número de vectores fila y de vectores columna que sean linealmente independientes.

Pero es evidente también que

Lema 2.8. *Sea* $f : V \to V$ *un endomorfismo. Entonces,*

$$\dim \mathrm{Im}\,(f) + \dim \mathrm{Ker}\,(f) = \dim V \tag{51}$$

Definición 2.6. *Llamaremos* **rango** *de una matriz T y denotaremos por* $\mathrm{Rank}\, T$ *al número de vectores fila o al número de vectores columna que son linealmente independientes. Análogamente, llamaremos* **núcleo** *de una matriz al subespacio generado por las soluciones de la ecuación* (50). *Ambos conceptos están relacionados por la expresión*

$$\mathrm{Rank}\, T + \dim \mathrm{Ker}\, T = \dim V,$$

que re-escribe la ecuación (51).

Ejercicio 2.6. *Sea el endomorfismo definido sobre $\mathbb{C}^3$ en la forma:*

$$\begin{aligned} A|e_1\rangle &= 5|e_1\rangle + 6|e_2\rangle - i|e_3\rangle \\ A|e_2\rangle &= 5|e_1\rangle + 6|e_3\rangle \\ A|e_3\rangle &= \vec{0} \end{aligned}$$

Determinar la matriz del endomorfismo en esa base. Determinar también su núcleo y su rango.

3.3. Cambio de base y conjugación. Hemos visto hasta ahora que la elección de una base establece una relación unívoca entre un endomorfismo y una matriz cuadrada. Sin embargo, dado que en Física no hay una base privilegiada respecto a otras, es natural preguntarse, ¿qué ocurre cuando cambiamos de base? ¿Hay alguna relación entre la matriz que está asociada al endomorfismo en una de ellas y la que está asociada en la otra?

La respuesta es afirmativa y es sencilla de obtener empleando la linealidad del endomorfismo. Consideremos entonces un endomorfismo f sobre un espacio vectorial V, y dos bases $\{|v_j\rangle\}_{j=1,\dots,n}$ y $\{|w_\alpha\rangle\}_{\alpha=1,\dots,n}$. Consideremos también la expresión de cada uno de los elementos de una base respecto a la otra, es decir:

$$|w_\alpha\rangle = \sum_k C_\alpha^k |v_k\rangle$$

o

$$|v_j\rangle = \sum_\beta S_j^\beta |w_\beta\rangle.$$

La información de estas transformaciones queda pues codificada en dos matrices:

$$C = \begin{pmatrix} C_1^1 & C_1^2 & \dots & C_1^n \\ C_2^1 & C_2^2 & \dots & C_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^n \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} S_1^1 & S_1^2 & \dots & S_1^n \\ S_2^1 & S_2^2 & \dots & S_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_n^1 & S_n^2 & \dots & S_n^n \end{pmatrix} \tag{52}$$

Evidentemente, ambas verifican que

$$CS = SC = \mathbb{I}_n.$$

Veamos ahora si podemos relacionar, usando estas matrices, las expresiones matriciales del endomorfismo f en una u otra base. Si consideramos que:

$$f|v_j\rangle = \sum_k T_j^k |v_k\rangle$$

y

$$f|w_\alpha\rangle = \sum_\beta U_\alpha^\beta |w_\beta\rangle$$

Podemos usar la expresión de una base respecto a la otra y escribir:

$$f|v_j\rangle = \sum_k T_j^k |v_k\rangle = \sum_k \sum_\beta T_j^k S_k^\beta |w_\beta\rangle \tag{53}$$

Si consideramos ahora la imagen de un vector arbitrario $|v\rangle \in V$, que en cada una de las bases tiene asociadas componentes $\{x^i\}$ y $\{x^\alpha\}$:

$$|x\rangle = \sum_j x^i |v_j\rangle = \sum_\alpha x^\alpha |w_\alpha\rangle = \sum_{\alpha,k} x^\alpha C_\alpha^j |v_j\rangle;$$

por lo que sabemos que las coordenadas en una y otra base están relacionadas como

$$x^j = \sum_\alpha C_\alpha^j x^\alpha \tag{54}$$

Y con estas relaciones obtenemos:

$$f|v\rangle = \begin{cases} \sum_{j,k} x^j T_j^k |v_k\rangle \\ \sum_{\alpha\beta} x^\alpha U_\alpha^\beta |w_\beta\rangle \end{cases}$$

Pero si usamos la Ecuación (53) podemos escribir:

$$f|v\rangle = \begin{cases} \sum_{j,k} x^j T_j^k |v_k\rangle = \sum_{j,k,\beta} x^j T_j^k S_k^\beta |w_\beta\rangle \\ \sum_{\alpha\beta} x^\alpha U_\alpha^\beta |w_\beta\rangle \end{cases} \tag{55}$$

Usando la ecuación (54):

$$f|v\rangle = \begin{cases} \sum_{j,k} x^j T_j^k |v_k\rangle = \sum_{j,k,\beta} x^j T_j^k S_k^\beta |w_\beta\rangle = \sum_{j,k,\alpha,\beta} x^\alpha C_\alpha^j T_j^k S_k^\beta |w_\beta\rangle \\ \sum_{\alpha\beta} x^\alpha T_\alpha^\beta |w_\beta\rangle \end{cases}$$

Con ello concluimos que, dado que la expresión de un vector (siempre es el mismo, $f|v\rangle$) en una misma base debe ser única:

$$U_\alpha^b = \sum_{jk} C_\alpha^j T_j^k S_k^\beta \tag{56}$$

Definición 2.7. *Diremos que dos matrices A y B están* **conjugadas** *si existe una matriz Z, invertible, que verifica que:*

$$B = ZAZ^{-1} \tag{57}$$

Pero entonces, lo que hemos concluido del análisis anterior es

Teorema 2.1. *Sea $f : V \to V$ un endomorfismo. Las expresiones que representan la aplicación lineal respecto a dos bases arbitrarias de V están conjugadas entre sí, siendo la matriz invertible que las relaciona la matriz del cambio de base de una a la otra.*

Es importante notar que, a pesar de que la anterior es la forma más frecuente de enfocar este problema, podemos pensar también en un esquema más general en el que separamos la base de partida y de llegada. Basta con admitir que, incluso para el caso de un endomorfismo donde el espacio de salida y llegada es idéntico, se puede pensar en usar dos bases diferentes. Si pensamos entonces en una situación de este tipo, donde consideramos las bases $\{|v_k\rangle\}$ y $\{|w_\alpha\rangle\}$ como base de salida y llegada, podemos recuperar la expresión de la Ecuación (55) y darnos cuenta de que podemos también relacionar los desarrollos en la base $\{|w_\alpha\rangle\}$ y afirmar que podemos asociar con la aplicación f la matriz:

$$f \to S_k^\beta T_j^k$$

que transforma las coordenadas x^j (respecto a la base $\{|v_j\rangle\}$) en las coordenadas x^β (respecto a la base $\{|w_\beta\rangle\}$). Usaremos este tipo de descomposiciones en el capítulo siguiente al considerar descomposiciones particularmente simples de una matriz dada.

4. El espacio vectorial de los endomorfismos de un espacio vectorial

4.1. Estructura de espacio vectorial. Es una propiedad conocida, y de fácil demostración, que el conjunto de matrices sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ define un espacio vectorial sobre el mismo, de dimensión n^2 (siendo n la dimensión de las matrices) -o nm si las matrices no son cuadradas, sino que tienen tamaño $n \times m$-. En lo que sigue pensaremos solamente en endomorfismos y por consiguiente en matrices cuadradas, aunque casi todos los resultados son extensibles al caso general.

Vamos a considerar pues en lo que sigue el conjunto de matrices cuadradas de dimensión n con entradas pertenecientes a un cuerpo $\mathbb{K}$. Podemos pensar en estos elementos como un "vector de vectores", que es la forma en que se manejan las matrices en los lenguajes de programación; o bien como un solo vector, que tiene como longitud n^2:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \{\overbrace{a_{11},\dots,a_{1n}}^{primera\ fila}, \overbrace{a_{21},\dots,a_{2n}}^{2^a fila}, \dots, \overbrace{a_{n1},\dots,a_{nn}}^{n-esima\ fila}\}$$

Si no consideramos ninguna restricción sobre las matrices (como que sean simétricas, o invertibles, etc) , nuestro conjunto es pues isomorfo al conjunto $\mathbb{K}^{n^2}$. Denotaremos este conjunto como $M_n(\mathbb{K})$

Una vez determinado el conjunto, podemos pasar a considerar si podemos extender al conjunto de matrices la operación suma de vectores que sabemos que existe sobre $\mathbb{K}^{n^2}$. Efectivamente, es sencillo ver que dadas dos matrices, la operación que traduce al lenguaje de matrices la operación suma de $\mathbb{K}^{n^2}$ es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Y esta es precisamente la definición de la suma de matrices. Evidentemente, el elemento neutro para una suma así definida corresponde a la matriz con todos los elementos nulos:

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Análogamente, el producto por un elemento del cuerpo $\mathbb{K}$, si tratamos las matrices como vectores, sería:

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Con estas dos relaciones, y usando el hecho de que sobre $\mathbb{K}^{n^2}$ sabemos que definen una operación de espacio vectorial, probamos que:

Lema 2.9. *El conjunto de matrices $M_n(\mathbb{K})$ tiene una estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.*

Desde el punto de vista anterior es sencillo entender que la base canónica de este espacio de matrices sea E_{ij}, definida por la matriz:

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & j & & & \\ & & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \tag{58}$$

Estas matrices traducen directamente los elementos de la base canónica de $\mathbb{K}^{n^2}$ a la forma de matrices.

Ejercicio 2.7. *Probar que el conjunto $\{E_{ij}\}$ con $i, j = 1, \dots, n$ forman una base de $M_n(\mathbb{K})$.*

Aunque no de forma directa se puede probar también usando el hecho de que son estructuras isomorfas que:

Corolario 2.1. *El conjunto de endomorfismos de un espacio vectorial V tiene también estructura de espacio vectorial. Lo denotaremos como* $\mathrm{End}(V)$.

La justificación rigurosa no la presentaremos pero sí emplearemos en lo que sigue el resultado.

4.2. Producto de matrices: estructura de álgebra. Aunque no forme parte de la estructura de espacio vectorial, aprovecharemos aquí para implementar sobre este conjunto la ley de composición de endomorfismos que vimos en la sección anterior. Si consideramos la composición de dos endomorfismos $f_1 : V \to V$ y $f_2 : V \to V$, definimos el objeto $f_2 \circ f_1 : V \to V$. ¿Qué expresión adopta la matriz correspondiente? ¿Podemos escribir esa matriz en función de las matrices de f_1 y f_2?

Supongamos entonces que T_1 y T_2 son las matrices correspondientes a los endomorfismos f_1 y f_2 respecto a una cierta base de V, $\{|e_i\rangle\}$. Sabemos que para determinar la expresión de la matriz asociada al endomorfismo $f_2 \circ f_1$ debemos escribir la imagen de un elemento arbitrario de la base en función de esta misma. Por tanto buscamos una matriz P que cumpla que:

$$f_2 \circ f_1(|e_j\rangle) = \sum_l P_j^l |e_l\rangle.$$

Consideramos la acción de cada una de las aplicaciones de forma consecutiva y la linealidad que asumimos que poseen:

$$f_2 \circ f_1(|e_j\rangle) = f_2 \left(\sum_k (T_1)_j^k |e_k\rangle \right).$$

Pero como f_2 es lineal, podemos escribir:

$$f_2 \circ f_1(|e_j\rangle) = \left(\sum_k (T_1)_j^k f_2(|e_k\rangle) \right) = \sum_k \sum_l (T_1)_j^k (T_2)_k^l |e_l\rangle.$$

Descubrimos entonces:

Lema 2.10. *La matriz asociada al endomorfismo compuesto $f_2 \circ f_1$ en una base dada $\{|e_j\rangle\}$ es el producto de las matrices asociadas a f_1 y f_2 en esa misma base, es decir*

$$P_j^l = \sum_k (T_1)_j^k (T_2)_k^l \tag{59}$$

Las propiedades de esta estructura de producto matricial (o equivalentemente de composición de endomorfismos) son bien conocidas:

Lema 2.11. *Sea $M_n(\mathbb{K})$ el espacio vectorial de matrices y consideremos el producto de matrices (59). Entonces,*

- *el producto es asociativo, es decir, para cualesquiera tres matrices $A_1, A_2, A_3 \in M_n(\mathbb{K})$ se cumple que:*

$$(A_1.A_2).A_3 = A_1.(A_2.A_3);$$

- *tiene un elemento neutro, que es la matriz identidad, esto es, para cualquier $A \in M_n(\mathbb{K})$ se cumple que*

$$A.\mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n.A = A;$$

- *el producto no es conmutativo, es decir, en general para dos matrices arbitrarias $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{K})$*

$$A_1.A_2 \neq A_2.A_1$$

El conjunto de matrices $M_k(\mathbb{K})$ dotado de la operación suma de matrices ya vista y la operación producto se convierte así en un **anillo asociativo con elemento neutro** *aunque no conmutativo.*

Si consideramos el conjunto y las tres operaciones, es decir, la operación producto definida sobre la estructura de espacio vectorial obtenemos una estructura de **álgebra asociativa y con elemento neutro***.*

4.3. La no existencia del inverso del producto. Una de las propiedades que más diferencia el producto de matrices del producto numérico usual es la conmutatividad, a la que ya nos hemos referido. Pero uno no menos importante es la no existencia de inverso para todas las matrices.

En efecto sabemos que en cualquier cuerpo todo elemento tiene asociado un inverso para la operación producto que pertenece al conjunto. Esto, sin embargo, no es cierto en el caso de una matriz. Por ejemplo, la matriz 3×3 definida como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

no tiene inverso. Es decir, no existe ninguna matriz B de dimensión tres que verifique

$$AB = \mathbb{I}_3.$$

Si pensamos en el endomorfismo como una aplicación que transforma un espacio vectorial V por la transformación lineal:

$$V \ni v \mapsto w = Av \in V, \tag{60}$$

es sencillo entender que esta transformación tendrá un inverso solo en aquellos casos en los que el rango de la matriz sea igual a la dimensión del espacio, o equivalentemente, en aquellos casos en los que el núcleo del endomorfismo se reduzca al vector $\vec{0}$:

Teorema 2.2. *Un endomorfismo $f : V \to V$ es invertible si y solo si* $\operatorname{Ker} f = \vec{0}$

Demostración. Sabemos por el Lema 2.8 que la condición de que el núcleo se anule es equivalente a que el rango de la aplicación f sea igual a la dimensión del espacio. Pero si el núcleo se anula también sabemos que la aplicación es inyectiva: a elementos distintos les corresponden imágenes diferentes. Al cubrir todos las posibles imágenes, sabemos que el endomorfismo define una biyección a través de (60). Por tanto, la aplicación es invertible. □

5. Endomorfismos en espacios suma directa y producto tensorial

Vamos ahora a poner en relación el concepto de endomorfismo con el concepto de suma directa y de producto tensorial de espacios vectoriales que vimos en el capítulo anterior. Evidentemente, una vez definido el espacio compuesto, sea el suma directa o el espacio producto cartesiano, podemos definir aplicaciones lineales sobre él. Pero el interés de la construcción radica en la caracterización de aplicaciones lineales y matrices del espacio compuesto en función de las aplicaciones lineales y matrices de cada uno de los espacios factores.

Consideremos pues dos espacios vectoriales, V_1, V_2 y dos endomorfismos

$$f_1 : V_1 \to V_1 \qquad f_2 : V_2 \to V_2.$$

Si consideramos bases en cada uno de los espacios, $\{|e^1_j\rangle\}$ en V_1 y $\{|e^2_j\rangle\}$ en V_2, podemos definir las matrices asociadas:

$$f_1 \to T = \begin{pmatrix} T^1_1 & T^2_1 & \dots & T^{n_1}_1 \\ T^1_2 & T^2_2 & \dots & T^{n_1}_2 \\ \vdots & & & \\ T^1_{n_1} & T^2_{n_1} & \dots & T^{n_1}_{n_1} \end{pmatrix} \qquad f_2 \to U = \begin{pmatrix} U^1_1 & U^2_1 & \dots & U^{n_2}_1 \\ U^1_2 & U^2_2 & \dots & U^{n_2}_2 \\ \vdots & & & \\ U^1_{n_2} & U^2_{n_1} & \dots & U^{n_2}_{n_2} \end{pmatrix}$$

Sabemos ahora que podemos definir bases del espacio suma directa o del producto tensorial componiendo las bases mencionadas:

- para el espacio suma directa, consideraremos la base de elementos de la forma

$$\mathcal{B}_\oplus = \left\{|e^1_j\rangle \times \{\vec{0}\}, \{\vec{0}\} \times |e^2_k\rangle\}| \quad j = 1, \dots, n_1; \;\; k = 1, \dots n_2 \right\} \tag{61}$$

- para el espacio producto tensorial, consideraremos la base:

$$\mathcal{B}_\otimes = \left\{|e^1_j\rangle \otimes |e^2_k\rangle\}| \quad j = 1, \dots, n_1; \;\; k = 1, \dots n_2 \right\} \tag{62}$$

¿Podemos ahora componer los dos endomorfismos definidos sobre los factores y definir un endomorfismo sobre el espacio suma directa o sobre el espacio producto tensorial?

Vamos a analizar separadamente cada caso:

5.1. Suma directa $V_1 \oplus V_2$. Consideremos la aplicación definida sobre la suma directa en la forma:

$$\begin{aligned} &F_+ : V_1 \oplus V_2 \to V_1 \oplus V_2 \\ &F_+(v_1 \oplus v_2) = f_1(v_1) \oplus \vec{0}_2 + \vec{0}_1 \oplus f_2(v_2) = f_1(v_1) \oplus f_2(v_2) \end{aligned} \tag{63}$$

Lema 2.12. *La aplicación (63) es lineal sobre $V_1 \oplus V_2$.*

Demostración. Para probar la propiedad tenemos que demostrar que dados dos elementos cualesquiera $v_a, v_b \in V_1 \oplus V_2$ y dos escalares $\alpha_a, \alpha_b \in \mathbb{K}$, se cumple que

$$F_+(\alpha_a v_a + \alpha_b v_b) = \alpha_a F_+(v_a) + \alpha_b F_+(v_b) \tag{64}$$

Sabemos por el teorema 1.2 que dado un elemento $v_a \in V_1 \oplus V_2$, existen una pareja de elementos $w^1_a \in V_1$ y $w^2_a \in V_2$ tales que

$$v_a = w^1_a \oplus w^2_a.$$

Análogamente, existe otra pareja de elementos que descompone v_b, es decir,

$$v_b = w^1_b \oplus w^2_b.$$

La aplicación se puede escribir entonces, por las propiedades de la suma directa, como

$$F_+(\alpha_a v_a + \alpha_b v_b) = F_+(\alpha_a w^1_a \oplus w^2_a + \alpha_b w^1_b \oplus w^2_b) = F_+((\alpha_a w^1_a + \alpha_b w^1_b) \oplus (\alpha_a w^2_a + \alpha_b w^2_b))$$

Si re-escribimos la ecuación (63) empleando esta descomposición, tendremos:

$$F_+(\alpha_a v_a + \alpha_b v_b) = (f_1(\alpha_a w^1_a + \alpha_b w^1_b)) \oplus (f_2(\alpha_a w^2_a + \alpha_b w^2_b))$$

Ahora, por la linealidad de f_1 y f_2 sabemos que

$$f_1(\alpha_a w^1_a + \alpha_b w^1_b) = \alpha_a f_1(w^1_a) + \alpha_b f_1(w^1_b); \quad f_2(\alpha_a w^1_a + \alpha_b w^1_b) = \alpha_a f_2(w^2_a) + \alpha_b f_2(w^2_b)$$

Con lo cual concluimos:

$$\begin{aligned}F_+(\alpha_a v_a + \alpha_b v_b) =& (\alpha_a f_1(w_a^1) + \alpha_b f_1(w_b^1)) \oplus (\alpha_a f_2(w_a^2) + \alpha_b f_2(w_b^2))\\ & \alpha_a (f_1(w_a^1) \oplus f_2(w_a^2)) + \alpha_b (f_1(w_b^1) \oplus f_2(w_b^2))\\ & \alpha_a F_+(v_a) + \alpha_b F_+(v_b)\end{aligned}$$

□

¿Qué forma toma la matriz de esta aplicación lineal en la base $\mathcal{B}_\oplus$? Para calcularlo basta con tomar los elementos de la base y aplicar la expresión de F_+:

$$F_+|e_j^1\rangle \times \{\vec{0}\} = (f_1|e_j^1\rangle) \times \{\vec{0}\} \quad F_+\{\vec{0}\} \times |e_k^2\rangle\} = \{\vec{0}\} \times (f_2|e_k^2\rangle)$$

De aquí deducimos que la matriz completa toma la forma:

$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$$

donde

$$T = \begin{pmatrix} T_1^1 & T_1^2 & \dots & T_1^{n_1} \\ T_2^1 & T_2^2 & \dots & T_2^{n_1} \\ \vdots & & & \\ T_{n_1}^1 & T_{n_1}^2 & \dots & T_{n_1}^{n_1} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} U_1^1 & U_1^2 & \dots & U_1^{n_2} \\ U_2^1 & U_2^2 & \dots & U_2^{n_2} \\ \vdots & & & \\ U_{n_2}^1 & U_{n_1}^2 & \dots & U_{n_2}^{n_2} \end{pmatrix}$$

5.2. Producto tensorial $V_1 \otimes V_2$. El caso del producto tensorial va a ser un poco más complicado. Consideremos el espacio vectorial obtenido como producto tensorial de dos factores

$$V = V_1 \otimes V_2.$$

Consideremos dos aplicaciones $f_1 : V_1 \to V_1$ y $f_2 : V_2 \to V_2$. Definamos sobre V, la aplicación

$$F_\times : V \to V \qquad F_\times(v_1 \otimes v_2) = f_1(v_1) \otimes f_2(v_2). \tag{65}$$

Notemos que esta aplicación no está definida sobre todos los elementos del espacio $V_1 \otimes V_2$, sino solamente sobre aquellos que habíamos definido como separables en el capítulo anterior. Podemos sin embargo considerar una aplicación más general, definida sobre todos los elementos del espacio, extendiendo por linealidad la aplicación $F_\times$. Consideremos entonces:

Definición 2.8. *Consideremos el producto tensorial de dos espacios $V_1 \otimes V_2$ y un endomofismo en cada uno de los factores, $f_1 : V_1 \to V_1$ y $f_2 : V_2 \to V_2$. Denominaremos* **producto tensorial de f_1 y f_2** *y denotaremos como $f_1 \otimes f_2$ a la aplicación lineal que sobre estados separables es igual a* (65).

La aplicación está bien definida porque sabemos por el Lema 1.1 que el producto tensorial de bases de los factores define una base para el espacio producto. Esto implica que es posible generar cualquier elemento de $V_1 \times V_2$ como combinación lineal de elementos separables. Por consiguiente, fijar el valor sobre estos y exigir que la aplicación sea lineal es suficiente para definir correctamente la misma.

Una vez definida la aplicación es sencillo proceder a determinar la expresión de la misma en una base, es decir, la representación matricial correspondiente.

Consideremos pues dos espacios vectoriales, V_1, V_2 y dos endomorfismos

$$f_1 : V_1 \to V_1 \qquad f_2 : V_2 \to V_2.$$

Si consideramos bases en cada uno de los espacios, $\{|e_j^1\rangle\}$ en V_1 y $\{|e_j^2\rangle\}$ en V_2, podemos definir las matrices asociadas:

$$f_1 \to T = \begin{pmatrix} T_1^1 & T_1^2 & \dots & T_1^{n_1} \\ T_2^1 & T_2^2 & \dots & T_2^{n_1} \\ \vdots & & & \\ T_{n_1}^1 & T_{n_1}^2 & \dots & T_{n_1}^{n_1} \end{pmatrix} \qquad f_2 \to U = \begin{pmatrix} U_1^1 & U_1^2 & \dots & U_1^{n_2} \\ U_2^1 & U_2^2 & \dots & U_2^{n_2} \\ \vdots & & & \\ U_{n_2}^1 & U_{n_1}^2 & \dots & U_{n_2}^{n_2} \end{pmatrix}$$

Consideremos entonces la imagen por la aplicación (65) del elemento genérico de la base del espacio producto tensorial:

$$F_\times(|e_j^1\rangle \otimes |e_k^2\rangle) = f_1(|e_j^1\rangle) \otimes f_2(|e_k^2\rangle)) = \sum_l (T)_j^l |e_l^1\rangle \otimes \sum_m (U)_k^m |e_m^1\rangle = \sum_{l,m} (T)_j^l (U)_k^m |e_l^1\rangle \otimes |e_m^1\rangle \tag{66}$$

Recuperamos entonces, a partir de la expresión general, la expresión de la representación matricial asociada a esta aplicación lineal.

Definición 2.9. *Denominaremos* **producto tensorial de las matrices** T **y** U *a la matriz, de dimensiones* $\dim T \dim U$ *obtenida a partir de las anteriores como*

$$(T)_j^l (U)_k^m. \tag{67}$$

Esta matriz es la representación matricial de la aplicación lineal definida sobre el espacio vectorial $V_1 \otimes V_2$ *por la aplicación* $iF_\times$*, escrita en la base* $\{|e_j^1\rangle \otimes e_k^2\rangle\}$*, donde* $\{|e_j^1\rangle\}$ *es una base de* V_1 *y* $\{|e_k^2\rangle\}$ *lo es de* V_2*.*

Ejercicio 2.8. *Consideremos de nuevo las matrices de Pauli introducidas en el Ejercicio 2.5,*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{68}$$

El producto tensorial

$$\sigma_1 \otimes \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 1 * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 1 * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\sigma_1 \otimes \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 * \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & 1 * \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ 1 * \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & 0 * \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar el resto de productos $\sigma_j \otimes \sigma_k$ *para* $j, k = 1, \dots, 3$*.*